Terza Esercitazione Matlab

Corso di Laurea in Ingegneria Matematica

17 Novembre 2009

1) Due polinomi in x sono rappresentati dai vettori dei coefficienti $[6, 2, 7, -3]$ e $[10, -5, 8]$. Determinare il polinomio prodotto ed esprimerlo nella sua forma semplice. Determinare il valore del polinomio prodotto per $x = 2$.

2) Determinare, in funzione del parametro $b \in \mathbb{R}$, i punti di intersezione delle due ellissi

$$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Calcolare tali punti nel caso $b = 2$.

3) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il polinomio caratteristico e gli autovalori della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4) Determinare tutti i valori di x dove il grafico della funzione $f(x) = 3^x - 2x$ ha una tangente orizzontale.

5) Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}, \quad \lim_{x \to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{\tan x}}, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 - 12x}{2x^3 + 5x}.$$

6) Risolvere il problema differenziale

$$\frac{dy}{dt} + \frac{2}{10 + 2t}\, y = 4, \quad y(0) = 0.$$

Rappresentare la soluzione $y(t)$ nell'intervallo $[0, 10]$.

7) Calcolare le derivate parziali della funzione $f(x, y) = 5 \cosh(2x) \ln(4y)$.

8) Verificare che il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = \frac{x}{x^2+1} (y')^2 \\ \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

ammette, nell'intervallo $I = (-\sqrt{e^2 - 1}, \sqrt{e^2 - 1})$, la seguente soluzione

$$y(x) = \int_0^x \frac{2}{2 - \log(1 + t^2)}\, dt.$$

9) Verificare che, nell'intervallo $I = (0, +\infty)$, il seguente problema

$$\begin{cases} y'' = \frac{(y')^2}{2y}\,(1 - \sqrt{|y|}) \\ \\ y(e) = 1, y'(e) = \frac{2}{e} \end{cases}$$

ammette la funzione $y(x) = (\log x)^2$ come soluzione.

10) Dire se per $x > 0$ la funzione

$$y(x) = \frac{A}{x} + \frac{B \log x}{x} + \frac{x}{4}$$

è soluzione, per ogni $A, B \in \mathbb{R}$, dell'equazione di Eulero

$$x^2 y'' + 3xy' + y = x.$$

11) Provare che l'equazione di Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

ammette le seguenti soluzioni:

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = -1 + \frac{x}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x}.$$

12) Provare che, nell'insieme $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, il problema

$$\begin{cases} x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = u^2 \\ \\ u(1, y) = y \end{cases}$$

ammette la soluzione

$$u(x, y) = \frac{y}{x^2 - y \log y}.$$

Rappresentare la soluzione nel quadrato $Q = [1, 10] \times [1, 10]$.

13) Un cavo privo di carico ed appeso alle sue estremità assume una forma detta *catenaria*. Il cavo di un ponte è descritto dalla catenaria $f(x) = 10 \cosh(\frac{x-20}{10})$, per $x \in [0, 50]$. Sapendo che la lunghezza L di una curva descritta dal grafico di una funzione $f(x)$ per $x \in [a, b]$ può calcolarsi mediante la formula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \Big(\frac{df}{dx}\Big)^2}\, dx,$$

determinare la lunghezza del cavo.